595. 函數論ノ一演習問題

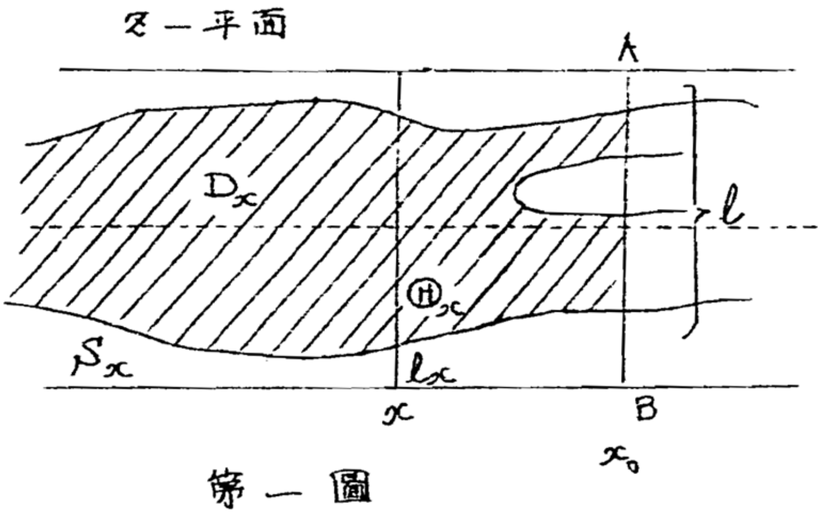
早田　文一

z平面上ニアル *Halbstreifen* $S: -\infty < x < +\infty,\ -\frac{l}{2} < y < \frac{l}{2}$ $(z = x + iy)$ ノ内部ニアル任意ノ *schlichter Bereich* ヲ D トスル。

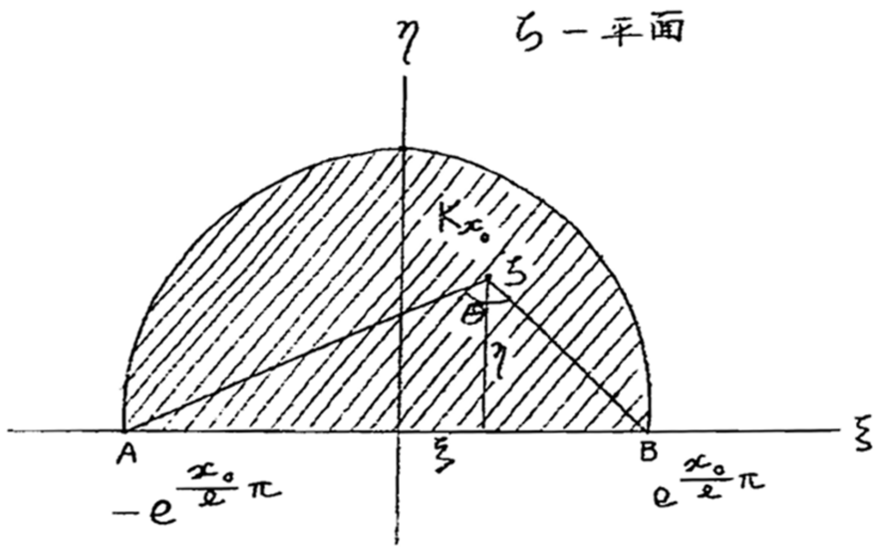
D ヲ y軸ニ平行ナ直線（座標 x）デ切ッタトキ出來ル *Querschnitt* ヲ $\textcircled{H}_x$ トスル。D ノ $\textcircled{H}_x$ ノ左側ニアル部分ヲ D_x デ示ス。S ニ關シテモ同様ニ座標 x ナル *Querschnitt* ヲ l_x. ソレヨリ左ニアル部分ヲ S_x トスル。

今 $\textcircled{H}_{x_0}$ ノ上デ 1, D_{x_0} ノ残リノ周辺デ 0 トナル調和函數（*harmonisches Masz*）ヲ $\omega(z, \textcircled{H}_{x_0}, D_{x_0})$ デアラハシ又. $\Omega(z, l_{x_0}, S_{x_0})$ ヲ S_{x_0} ニ關シテ同様ナ意味ヲ有スル調和函數トスレバ *Prinzip der Gebietserweiterung* ニヨリ D_{x_0} 内ノ任意ノ z ニツキ次ノ不等式ガ成立スル。

(1)　$\omega(z, \textcircled{H}_{x_0}, D_{x_0}) \leqq \Omega(z, l_{x_0}, S_{x_0})$



第一圖



第 二 圖

先ヅ $\Omega(z, l_{x_0}, S_{x_0})$ ヲ求メンガタメ *Halbstreifen* S_{x_0} ヲ次ノ変換ニヨリ ζ 平面ノ上半面ニ位スル半円ニ一對一ニ寫像スル。

$$\zeta = ie^{\frac{z}{l}\pi}$$

シカルトキハ *Halbstreifen* ノ右側ノ *Berandung* AB ハ半径 $e^{\frac{x_0}{l}\pi}$ ナル半円周ニウツサレ、上，下ノ *Berandung*. A∞, B∞ ハ夫々負軸，正軸ニ一致スル半径ニウツサレル。*harmonisches Marz* ハ一對一ノ等角寫像ニヨリ変ラナイノデアルカラ *Halbkreis* K_{x_0} ニツキ Ω ヲ求メル。K_{x_0} 内ニ任意ノ一点 ζ ヲトリコレガ A, B ニ對スル角ヲ θ トスレバ

$$\Omega = a\theta + b$$

円周上デ 1，直径上デ 0 デアル條件カラ a, b ヲ求メテ

$$\Omega = \frac{2}{\pi}(\pi - \theta)$$

$\zeta=\xi+i\eta$ トスレバ

$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{e^{\frac{x_0}{l}\pi}-\xi}{\eta}+\operatorname{arc\,tg}\frac{e^{\frac{x_0}{l}\pi}+\xi}{\eta}$$

デアルカラ簡単ナ三角法ノ計算ニヨリ

$$(2)\qquad \Omega=\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\eta e^{\frac{x_0}{l}\pi}}{e^{\frac{2x_0}{l}\pi}-\xi^2-\eta^2}$$

$$\zeta=\xi+i\eta=e^{\frac{z}{l}\pi}i \qquad\qquad z=x+iy.$$

Ω ハ l_x ノ上デハ、ソノ中点デ最大値ヲトルカラ $y=0$ 即チ

$$\xi+i\eta=e^{\frac{x}{l}\pi}i\,,\qquad \xi=0,\ \ \eta=e^{\frac{x}{l}\pi}$$

ヨッテ (2) ヨリ l_x 上ノ Ω ノ最大値トシテ次ノ値ヲ得ル。

$$(3)\qquad \Omega=\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2e^{\frac{x+x_0}{l}\pi}}{e^{\frac{2x_0}{l}\pi}-e^{\frac{2x}{l}\pi}}=\frac{4}{\pi}\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x-x_0}{l}\pi}$$

次ニ上ノ Ω ヲ用ヒテ Carleman ノ微分不等式ノ方法ヲ繰返シテ見ル。$x<X_0<x_0$ ナルトキ次ノ不等式ガ成立スル。

$$\omega(z,\textcircled{H}_{x_0},D_{x_0})\leqq\omega(z,\textcircled{H}_{X_0},D_{X_0})\,\Omega(Z_0,l_{X_0},S_{X_0})$$

$(\Re Z_0=X_0$, Ω ハ l_{X_0} 上ノ最大値トスル$)$

$\textcircled{H}_{X_0}$ ノ上デハ右辺ノ第一因数ハ 1. 残リノ不等式ハ (1) ニヨリ正シイ。又 D_{X_0} ノ残リノ Berandung デハ両辺

共ニ0デ正シイ。ヨツテ内点zニツキ上ノ不等式ハ成立スル。(Maximumprinzip)コレヲ変形スルト

$$\omega(z,x_0)-\omega(z,X_0)<-\{1-\Omega(z_0,x_0)\}\omega(z,X_0)$$

但シ、$\omega(z,x_0)$，$\Omega(z_0,x_0)$ハ夫々ノ略記号デアル。ヨツテ$X_0\longrightarrow x_0$ナラシムレバ$x<x_0$ナル任意ノzニ對シテ

$$(4)\qquad \frac{d\omega(z,x_0)}{dx_0}\leqq -E\omega(z,x_0)$$

但シ

$$E=\lim_{X_0\to x_0}\frac{1-\Omega(z_0,x_0)}{x_0-X_0}$$

コヽノΩ＝(3)ノ値ヲ代入スレバ

$$E=\frac{2}{l}$$

故ニ、$x<x_1<x_2$ナルトキ(4)ヲx_1，x_2間ニ積分スルコトニヨリ

$$(5)\qquad \omega(z,x_2)\leqq\omega(z,x_1)e^{-\frac{2}{l}(x_2-x_1)}$$

Carlemanハ広イ假定ノモトノ二次ノ不等式ヲ出シタ。

$$\omega(z,x_2)\leqq\omega(z,x_1)e^{-\frac{4}{\pi}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx_0}{\Theta(x_0)}}$$

今ノ場合ノ様ニDx_0がSx_0ニ含マレルナラバ

$$\Theta(x_0)\leqq l$$

デアルカラ

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx_0}{H x_0} \leqq -\frac{x_2-x_1}{l}$$

故ニ

$$\omega(x, x_2) \leqq \omega(x, x_1)\, e^{-\frac{4}{\pi}\frac{x_2-x_1}{l}}$$

$-2 < -\frac{4}{\pi}$ デアルカラ、コレヨリハ (5) ノ方ガ精確デアル。

然シコレハ D_{x_0} ガ S_{x_0} ニ近イ図形ノトキニカギルノデアル。

実際 $H(x_0)$ ガアル x_0 デ非常ニ小ナルトキ コノ前後ニ亘ル

積分区間 (x_1, x_2) デハ

$$-\frac{4}{\pi}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx_0}{H(x_0)} < -\frac{2}{l}(x_2-x_1)$$

トナルデアラウ。